

Exercice 1_S : Les chaussettes assorties. Éléments de réponses

1. Les fréquences observées se situent toutes entre 0,10 et 0,40.

Seules deux sont dans l'intervalle: $\left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{50}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right] \cong [0,36 ; 0,64]$, ce qui est loin des 95% théoriques. L'hypothèse d'avoir 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises n'est donc pas validée.

Autre réponse possible : les résultats de la simulation montrent que p serait compris entre 0,10 et 0,40 proche de $(0,10+0,40)/2=0,25$ et non égal à 0,5.

- 2.

a) $p = \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} = \frac{11}{20} = 0,55$

b) $p = \frac{18}{25} \times \frac{17}{24} = \frac{51}{100} = 0,51$

- c) La probabilité d'obtenir un couple de chaussettes grises est :

$$\frac{g}{g+204} \times \frac{g-1}{g+203} = \frac{1}{2} \text{ ce qui s'écrit } (g+204)(g+203) = 2g(g-1)$$

$$g^2 - 409g - 41412 = 0, \Delta = 332929 = 577^2, g = -84 \text{ ou } 493$$

donc $g = 493$ car $g > 0$.

3. $p = \frac{g}{g+b} \times \frac{g-1}{g+b-1} = \frac{1}{2}$ s'écrit :

$$2g(g-1) = (g+b)(g+b-1) \Leftrightarrow -b + g + 2bg + b^2 - g^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow g^2 - (2b+1)g - (b^2 - b) = 0 \text{ dont le}$$

discriminant est $1 + 8b^2$ et la racine positive $\frac{1+2b+\sqrt{\Delta}}{2}$ n'est entière que si $1 + 8b^2$ est un carré parfait ce qui n'est le cas que pour certaines valeurs de b :

b	1	6	35	204
Δ	$9 = 3^2$	$289 = 17^2$	$9801 = 99^2$	$257\,049 = 577^2$
g	(0 ou) 3	(-2 ou) 15	(-14 ou) 85	(-84 ou) 493

Si l'on choisit b comme inconnu, on a :

$$-b + g + 2bg + b^2 - g^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 - (1-2g)b - (g^2 - g) = 0 \text{ dont le}$$

discriminant est $8g^2 - 8g + 1$ doit être un carré parfait ce qui n'est le cas que pour certaines valeurs de g :

g	1	3	15	85	493
Δ	$1 = 1^2$	$49 = 7^2$	$1\,681 = 41^2$	$57\,121 = 239^2$	$1\,940\,449 = 1\,393^2$
b	(-2 ou) 0	(-7 ou) 1	(-36 ou) 6	(-205 ou) 35	(-1190 ou) 204

4. Soit il commence par le pied gauche, $p_1 = \frac{g}{2g+2b}$, puis le pied droit, $p_2 = \frac{g}{2g+2b-1}$, soit le contraire. On

obtient l'équation : $2 \times \frac{g}{2g+2b} \times \frac{g}{2g+2b-1} = \frac{1}{2}$

ou encore $4g^2 = (2g+2b)(2b+2b-1) \Leftrightarrow (8b-2)g = 2b-4b^2$.

Si $(8b-2) = 0$ alors $b = \frac{1}{4}$ impossible car b est un entier.

Sinon, $(8b-2) \neq 0$, on peut donc effectuer la division :

$$g = \frac{2b(1-2b)}{2(4b-1)} = \frac{b(1-2b)}{4b-1} \text{ ce qui est impossible car pour tout } b, 1-2b \text{ est négatif, donc } g \text{ serait négatif.}$$

Dans ce cas, il n'y aura pas de solution.

